

1. cvičení - teorie

Tabulka derivací od Kuncové (odkaz)

Věta (linearita integrálu). Necht' f, g jsou spojité funkce a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int af(x) + bg(x) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Věta (per partes). Necht' u, v jsou spojité funkce na I . Pak platí

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

Věta (substituce). Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a φ diferencovatelná funkce na (α, β) . Je-li $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, pak platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) \text{ pro } x \in (\alpha, \beta).$$

Níže bude:

- reciproké rovnice,
- parciální zlomky,
- goniometrické substituce,
- odmocniny.

Vzorce

- | | |
|---------------------------------|---|
| • $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | • $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| • $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | • $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ |
| • $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ | • $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ |
| | • $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ |

Reciproké rovnice

Definice. Uvažme rovnici $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$.

Pokud $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice **reciproká rovnice 1. druhu**.

Pokud $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice **reciproká rovnice 2. druhu**.

Poznámka. 1. druh: první a poslední koeficient se rovnají, druhý a předposlední se rovnají, atd. ...

2. druh: první a poslední koeficient se ve znaménku, druhý a předposlední se liší ve znaménku, atd. ...

Příklad.

1. druh: $2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$
2. druh: $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 3 = 0$

Pokud by v poslední rovnici místo 0 bylo jiné číslo, tak by nešlo o reciproknou rovnici - 1. druhu být nemůže, neboť $a_4 \neq a_0$, a 2. druhu být nemůže, neb $a_2 \neq -a_2$ ($n = 4, k = 2$).

Platí následující:

- Je-li x kořenem reciprokné rovnice, pak i $\frac{1}{x}$ je kořenem reciprokné rovnice
- 1. druh lichý stupeň $\implies -1$ je kořen
- 1. druh sudý stupeň $\implies$ vytkneme $x^{\frac{n}{2}}$ a uijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$
- 2. druh $\implies 1$ je kořen

Postup: Rovnici vydělíme $(x - \text{kořen})$ nebo $x^{\frac{n}{2}}$ - podle toho o jaký typ rovnice jde (viz výše). Dostaneme reciproknou rovnici nebo rovnici, kterou již umíme vyřešit a postupujeme dál.

Příklad. Vyřešte rovnici $3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě jde o rovnici 1. druhu lichého stupně. Rovnice by tedy, dle výše uvedeného, kořen -1 (lze ověřit dosazením).

$$\begin{aligned} 3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 &= 0 \quad / : (x + 1) \rightarrow \text{kořen } -1 \\ 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici 1. druhu sudého stupně. Proto rovnici vytkneme x^2 a provedeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 &= x^2 \left(3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \\ y = x + \frac{1}{x}, \quad y^2 &= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \\ \text{pak } 3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} &= 13 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 16 = 13y + 3(y^2 - 2) + 16 = \\ &= 3y^2 + 13y + 16 - 6 = 3y^2 + 13y + 10 = (y + 1)(3y + 10) = \\ &= \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right) \\ \implies 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 &= x \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) x \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right) = \\ &= (x^2 + x + 1) (3x^2 + 10x + 3) = (x^2 + x + 1)(3x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

Z rozkladu je vidno, že rovnice $3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$ má kořeny $-\frac{1}{3}, -3$.
Celkově má zadaná rovnice kořeny: $-3, -1, -\frac{1}{3}$.

Parciální zlomky

Jak na parciální zlomky: <https://math.fel.cvut.cz/mt/txtld/3/txc3db3i.htm>

Rozklad na parciální zlomky

- funguje v případě, že čítec je nižšího řádu, než jmenovatel - pokud tomu tak není, tak nejdřív provedeme dělení polynomu polynomem
- jmenovatele rozložím na součin - co nejvíc to jde, dostanu nejvýše kvadratické činitele
- napíšu *zadaný zlomek* = součet zlomků takto:
 - ve jmenovateli je $(ax + b)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1}{ax+b} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
 - ve jmenovateli je $(ax^2 + bx + c)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$
- získanou rovnici přenásobím jmenovatelem
- upravím do tvaru $\dots = (\dots)x^n + (\dots)x^{n-1} + \dots + (\dots)x + (\dots)$
- provonám koeficienty u stejných mocnin $x \rightarrow$ soustava
- vyřeším soustavu $\rightarrow$ dostanu hodnoty A_i, B_i

Poznámka. Při rozkladu jmenovatele: pokud kvadratický trojčlen lze rozložit na součin, tak jej rozložím (jinak by mohl vyjít zlomek, který nelze zintegrovat).

Návod/nápověda

- čítec alespoň stejného stupně, než jmenovatel $\rightarrow$ dělení mnohočlenu mnohočlenem
- rozklad na parciální zlomky
- $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{1}{ax^2+b} dx \rightarrow$ substitucí převedeme na $\int \frac{1}{y^2+1} dy$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ doplněním na čtverec, převedeme na předchozí případ
- $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow \int \frac{1}{(u^2+1)^n} \rightarrow$ substituce $u = \tan t$

Goniometrické substituce

!!! Vždy je třeba si hlídat definiční obory !!!

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

- $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \cos x, dt = -\sin x dx$
- $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \implies t = \sin x, dt = \cos x dx$
- $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \implies t = \tan x$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}, \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1 + t^2}$$

- Vždy: $t = \tan \frac{x}{2}$ pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Pak

$$dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Odmocniny

Nechť $R(\cdot, \cdot)$ je racionální funkce dvou proměnných (jde o podíl dvou polynomů dvou proměnných).

U níže uvedených substitucí: k dopočtu dt nejdříve vyjádříme x v závislosti na t a pak teprve derivujeme (vizte příklad níže)

- $R(x, \sqrt[m]{x+a}), m \in \mathbb{N}, m > 1, \implies t = \sqrt[m]{x+a}$
- $R(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}), m \in \mathbb{N}, m > 1, a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad \neq bc \implies t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \implies \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}|x - x_1|$
 - $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \implies t = \sqrt{a \frac{x - x_1}{x - x_2}}$
 - $ax^2 + bx + c$ nemá kořen $\implies t = \sqrt{ax^2 + bx + c} \pm x\sqrt{a}$

Poznámka. Vyskytuje-li se v integrálu více odmocnin, převedeme je na mocniny téže odmocniny (např. $\sqrt{x}$ a $\sqrt[3]{x}$ převedeme na $(\sqrt[6]{x})^3$ a $(\sqrt[6]{x})^2$).

Příklad. $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

$$t^2 = \frac{x+1}{x-2} \implies t^2(x-2) = x+1 \implies x(t^2-1) = 1+2t^2 \implies x = \frac{2t^2+1}{t^2-1}$$

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2-1} \implies dx = \frac{4t(t^2-1) - (2t^2-1)2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{4t^3 - 4t - 4t^3 - 2t}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-6t}{(t^2-1)^2} dt$$